COHOMOLOGIE DES GROUPES

1 Généralités,Rappels:

- L'anneau d'un groupe G sera par définition

$$\mathbb{Z}[G] = \{\sum_{g\in G} a_g g, a_g \in \mathbb{Z} \text{ presque tous nuls}\}.$$

  On le munit d'une structure d'anneau (Z[G],+,.) (addition évidente, multiplication non moins évidente donnée par $\sum a_i g_i \sum b_j g_j = \sum_{i,j} a_i b_j (g_i g_j)$). Cet anneau est abélien si et seulement si G l'est.

- Un G-module A désignera un $\mathbb{Z}[G]$-module, ie un groupe abélien sur lequel G agit.
- Soit R un anneau, P un R-module.P sera dit projectif s'il vérifie l'une des conditions suivantes équivalentes:
  - P est facteur direct d'un R-module libre.
  - Pour tout $f : P \to M$ morphisme de R-modules surjectif et pour tout $g : P \to M$ morphisme de G-module, il existe $h : P \to N$ morphisme de R-modules tes que $g = f \circ h$.
  - $Hom_R(P, -)$ est exact.
- Soit A un G-module , $(X^i)_{i\geq 0}$ une suite de G-modules et $\partial^i : X^{i+1} \to X^i$ une suite de morphismes de G-modules. Si la suite

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\partial^0} X^0 \xrightarrow{\partial^1} X^1 \xrightarrow{\partial^2} \cdots$$

  est exacte, on dit que c'est une **résolution** du G-module A.
  Cette résolution est qualifiée de libre (resp projective) si les X^i sont des $\mathbb{Z}[G]$-modules libres (resp projectifs).
- Soit

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\partial^0} X^0 \xrightarrow{\partial^1} X^1 \xrightarrow{\partial^2} \cdots$$

  un complexe $\mathcal{C}$ de G-modules, ie une suite de G-modules (X^i) tels que $\partial \circ \partial = 0$. On définit sont homologie $H_*(\mathcal{C})$ en posant $H_0(\mathcal{C}) = Ker\partial^0$ et $H_n(\mathcal{C}) = Ker\partial^n / Im\partial^{n-1}$.

2 Cohomologie des groupes:

Proposition: Pour $n \geq 0$, on définit

$$\begin{array}{rcl} \partial^n : X^{n-1} & \to & X^n \\ x & \mapsto & \partial^n(x) \end{array}$$

avec $\partial^n(x)(\sigma_0, ..., \sigma_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x(\sigma_0, ..., \check{\sigma_i}, ..., \sigma_n)$
et

$$\begin{array}{rcl} \partial^0 : A & \to & X^0 \\ a & \mapsto & \alpha \end{array}$$

avec $\alpha(\sigma) = a \qquad$ pour tout $\sigma \in G$.
La suite

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\partial^0} X^0 \xrightarrow{\partial^1} X^1 \xrightarrow{\partial^2} ...$$

est exacte.

Démonstration:
On commence par montrer que c'est un complexe:

$$\partial^0 \circ \partial^0(a) = a - a = 0.$$

tandis que

$$\begin{array}{rcl} \partial^n \circ \partial^{n-1}(\sigma_0, ..., \sigma_n, \sigma_{n+1}) & = & \partial^n\{(\sigma_0, ..., \sigma_n) \mapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x(\sigma_0, ..., \check{\sigma_i}, ..., \sigma_n)\} \\ & = & 0 \end{array}$$

puisque chaque terme apparaît avec le coefficient $(-1)^{i+j} + (-1)^{i+j-1}$.
Montrons maintenant l'exactitude. Pour cela, on considère

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}^{-1} : X^0 \to A | \mathcal{D}^{-1}(x) = x(1) \\ \mathcal{D}^n : X^{n+1} \to X^n | \mathcal{D}^n x(\sigma_0, ..., \sigma_n) = x(1, \sigma_0, ..., \sigma_n). \end{array} \right.$$

Alors pour tout $n \geq 0$,

$$\mathcal{D}^n \circ \partial^{n+1} + \partial^n \circ \mathcal{D}^{n-1} = Id_{X^n}$$

En effet, pour $n = 0$*:*

$$\begin{array}{rcl} \{[\mathcal{D}^0 \circ \partial^{-1} + \partial^0 \circ \mathcal{D}^{-1}](x)\}(\sigma_0) & = & [\mathcal{D}^0\{(\sigma_0, \sigma_1) \mapsto x(\sigma_1) - x(\sigma_0)\} + \partial^0(x(1))](\sigma_0) \\ & = & x(\sigma_0) - x(1) + x(1) \\ & = & x(\sigma_0) \end{array}$$

tandis que pour $n \geq 1$*:*

$$\begin{array}{rcl} [\mathcal{D}^n \circ \partial^{n-1} + \partial^n \circ \mathcal{D}^{n-1}](x(\sigma_0, ..., \sigma_n)) & = & \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x(1, \sigma_0, ..., \check{\sigma_i}, ..., \sigma_n) \\ & & + \sum_{i=-1}^{n} (-1)^{i+1} x(1, \sigma_0, ..., \check{\sigma_i}, ..., \sigma_n) \end{array}$$

Dès lors,

$$x \in Ker \ \ \partial^{n+1} \Rightarrow x \in Im \ \ \partial^n$$

donc $Ker \ \ \partial^{n+1} = Im \ \ \partial^n$.

Cette résolution s'appelle la **résolution standard**.

Défnition: On appelle n^e **groupe de cohomologie** du groupe G à valeurs dans le G-module A les groupes $H^n(G, A)$ définis par

$$H^n(G, A) = Ker\partial^n / Im\partial^{n-1} := \mathcal{Z}^n / \mathcal{B}^n$$

où

$$0 \to Hom_G(\mathbb{Z}, A) \xrightarrow{\partial^{-1}} Hom_G(\mathbb{Z}[G], A) \xrightarrow{\partial^0} Hom_G(\mathbb{Z}[G^2], A) \xrightarrow{\partial^1} \cdots$$

est obtenue à partir de la résolution standard en lui appliquant le foncteur $Hom_G(-, A)$ qui est covariant, et non exact; fort heureusement, sinon la cohomologie d'un groupe serait triviale (et la vie serait moins belle), la cohomologie d'une groupe mesurant en quelque sorte le défaut d'exactitude de ce foncteur.

Nb: On a

$$Hom_G(\mathbb{Z}[G^{n+1}], A) \equiv \{f : G^{n+1} \to A \ \mid \ f(gg_0, ..., gg_n) = g.g(g_0, ..., g_n)\} := \mathcal{C}^n(G, A)$$

Nb: On peut également définir le groupe de cohomologie en termes de cochaînes inhomogènes, rendant les calculs souvent plus facilement explicitables. Pour cela, on commence par définir

$$\mathfrak{C}^0 = A$$

et pour $n \geq 1, \mathfrak{C}^n(G, A) = \{fontions \ de \ G^n \ dans \ A\}$. On a alors des isomorphismes:

$$\Psi_0 : \mathcal{C}^0(G, A) \to \mathfrak{C}^0(G, A)$$

telle que

$$\Psi_0(x) = x(1)$$

et pour $n \geq 1$

$$\Psi_n : \mathcal{C}^n(G, A) \to \mathfrak{C}^n(G, A)$$

telle que

$$\Psi_n(x)(\sigma_1, ..., \sigma_n) = x(1, \sigma_1, \sigma_1\sigma_2, ..., \prod_i \sigma_i).$$

d'inverse

$$y \mapsto x | x(\sigma_0, ..., \sigma_{n+1}) = \sigma_0 y(\sigma_0^{-1}\sigma_1\sigma_0^{-1}, ..., \sigma_0^{-1}\sigma_n\sigma_0^{-1}).$$

Comment sont transformés les opérateurs de bord? On considère le diagramme commutatif suivant, qui définit l'opérateur $\partial^n : \mathfrak{C}^{n-1}(G, A) \to \mathfrak{C}^n(G, A)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{n-1}(G, A) & \xrightarrow{\Psi_{n-1}} & \mathfrak{C}^{n-1}(G, A) \\ \downarrow{\scriptstyle \partial^n} & & \downarrow{\scriptstyle \partial^n} \\ \mathcal{C}^n(G, A) & \xrightarrow[\Psi_n]{} & \mathfrak{C}^n(G, A) \end{array}$$

Explicitons: Soit $y \in \mathfrak{C}^{n-1}, (\sigma_0, ..., \sigma_{n-1}) \in G^n$;

$$\begin{aligned}
\partial^n y(\sigma_0, ..., \sigma_{n-1}) &= \Psi_n \circ \partial^n \circ \Psi_{n-1}^{-1}(y)(\sigma_0, ..., \sigma_{n-1}) \\
&= \Psi_n \circ \partial^n[(\sigma_0, ..., \sigma_{n-1}) \mapsto \sigma_0 y(\sigma_0^{-1}\sigma_1, ..., \sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1})] \\
&= \Psi_n[(\sigma_0, ..., \sigma_n) \mapsto \sigma_1 y(\sigma_1^{-1}\sigma_2, ..., \sigma_{n-1}^{-1}\sigma_n) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \sigma_0 y(\sigma_0^{-1}\sigma_1, ..., \overbrace{\sigma_{i-1}^{-1}\sigma_i}^{\surd}, ..., \sigma_{n-1}^{-1}\sigma_n)] \\
&= \sigma_0 y(\sigma_1, ..., \sigma_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} y(\sigma_0, ..., \sigma_{i-1}, \sigma_i\sigma_{i+1}, \sigma_{i+2}, ..., \sigma_{n-1}) + (-1)^n y(\sigma_0, ..., \sigma_{n-1})
\end{aligned}$$

Ainsi a-t-on:

$$\partial^1 a(\sigma) = \sigma a - a \quad \forall a \in A = \mathfrak{C}^0(G, A).$$

$$\partial^2 y(\sigma, \tau) = \sigma y(\tau) - y(\sigma\tau) + y(\sigma) \quad \forall y \in \mathfrak{C}^1(G, A).$$

Si l'on pose

$$\mathfrak{Z}^n(G, A) = Ker[\mathfrak{C}^n(G, A) \to \mathfrak{C}^{n+1}(G, A)]$$

$$\mathfrak{B}^n(G, A) = Im[\mathfrak{C}^n(G, A) \to \mathfrak{C}^{n+1}(G, A)]$$

les isomorphismes ψ_n induisent des isomorphismes

$$H^n(G, A) \backsimeq \mathfrak{Z}^n(G, A)/\mathfrak{B}^n(G, A).$$

3 Petites Dimensions:

3.1 $H^0(G,A)$:

Le groupe $H^0(G,A)$ est particulièrememt facile à décrire. En effet, si l'on utilise la description en termes de cochaînes inhomogènes,

$$H^0(G,A) = Ker \;\; \partial^1 = \{a \in A | \forall \sigma \in G, \sigma a - a = 0\} = A^G :$$

les invariants de A sous l'action de G. Bref, pour tout G-module A, on a montré que

$$H^0(G,A) = A^G.$$

3.2 $H^1(G,A)$:

Les 1-cocycles inhomogènes sont les fonctions $x : G \to A$ telles que

$$x(\sigma\tau) = x(\sigma) + \sigma x(\tau) \quad \forall \sigma, \tau \in G.$$

Les 1-cobords sont les 1-cochaînes $x : G \to A$ telles que

$$x(\sigma) = \sigma a - a \;\; \forall \sigma \in G$$

avec $a \in A$ fixé. Donc si par exemple A est un G-module trivial, les cobords sont triviaux tandis que les cochaînes coïncident avec les morphismes de groupes de G dans A, donc

$$H^1(G,A) = Hom_{groupes}(G,A)$$

pour tout G-module trivial A.
On peut donner une description de $H^1(G,A)$ en termes de dérivations...

- En effet, une **dérivation** de G dans un G-module A est une application $D : G \to A$ telle que $D(\sigma\tau) = \sigma D(\tau) + D(\sigma)$. On note Der(G,A) l'ensemble des dérivations de G dans A.
- Une **dérivation principale** est une dérivation satisfaisant

  $$D(\sigma) = \sigma a - a$$

  avec $a \in A$ fixé (vérifie sans peine que cette application est une dérivation). On note cette dérivation D_a. Leur ensemble constitue un sous groupe de Der(G,A) que l'on note PDer(G,A).

Avec la description en terme de cochaines inhomogenes, il est clair que

$$H^1(G,A) = Der(G,A)/PDer(G,A).$$

3.3 $H^2(G,A)$:

Les 2-cochaînes inhomogènes sont les fonctions $x : G \times G \to A$ tels que

$$x(\sigma\tau, \rho) + x(\sigma, \tau) = x(\sigma, \tau\rho) + \sigma x(\tau, \rho).$$

Les 2-cobords inhomogènes sont les 2-cochaînes $x : G \times G \to A$ telles que

$$x(\sigma, \tau) = y(\sigma) - y(\sigma\tau) + \sigma y(\tau)$$

avec $y : G \to A$ une 1-cochaîne fixée.

4 Calculs:

On vient de construire les groupes de cohomologie comme étant l'homologie du complexe obtenu en appliquant le foncteur $Hom_G(-, A)$ à la résolution standard (l'homologie d'un complexe étant la suite de groupes obtenue en quotientant les noyaux de chaque application par l'image de la précédente). Cette résolution est bien sûr une $\mathbb{Z}[G]$-résolution projective (car libre). Les objets considérés étant relativement gros, les calculs restent compliqués. L'objet de la présente section est de voir que la définition des groupes de cohomologie est indépendante de la résolution choisie (sous certaines conditions) ce qui rend souvent les calculs plus faciles.

Définition:

- Si K et K' sont deux complexes, un **morphisme de complexes**

$$f : K \to K'$$

est une famille de morphismes de modules

$$f_n : K_n \to K'_n$$

telle que pour tout $n \geq 0$,

$$\partial'_n f_n = f_{n-1} \partial_n,$$

ie telle que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & K_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & K_n & \xrightarrow{\partial_n} & K_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & & \\ \cdots & \longrightarrow & K'_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & K'_n & \xrightarrow{\partial_n} & K'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

- Une **homotopie** s entre deux morphismes de complexes $f, g : K \to K'$ est une famille de morphismes de modules

$$s_n : K_n \to K'_{n+1}$$

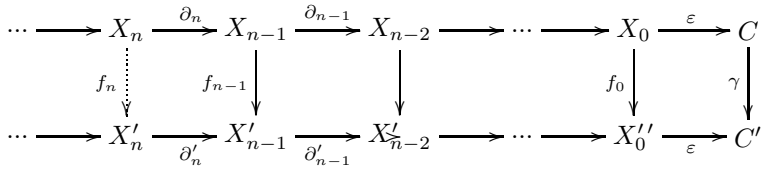
telle que pour tout $n \geq 0$,

$$\partial'_{n+1} s_n + s_{n-1} \partial_n = f_n - g_n.$$

Théorème (de comparaison): Si $\gamma : C \to C'$ est un morphisme de modules et $\varepsilon : X \to C$ un complexe **projectif** sur C , $\varepsilon' : X' \to C'$ une résolution de C'.
Alors il existe un morphisme de complexes $f : X \to X'$, unique à homotopie près, tel que $\varepsilon' f = \gamma \varepsilon$.
On dit que f relève γ.

Démonstration:
Puisque X_0 est projectif et que ε' est un épimorphisme,$\gamma\varepsilon : X_0 \to C'$ peut être relevé en $f_0 : X_0 \to X'_0$. Par récurrence, il suffit de construire f_n sachant que $f_{n-1}, ..., f_0$ ont été

construits de telle sorte que le diagramme



soit commutatif. Par commutativité du diagramme, $\partial'_{n-1} f_{n-1} \partial_n = f_{n-2}\partial\partial = 0$ *donc* $im(f_{n-1}\partial_n) \subset ker(\partial'_{n-1})$. *Par exactitude de la ligne du bas, ce noyau est* $\partial'_n(X'_n)$. *Puisque* X_n *est projectif, l'application* $f_{n-1}\partial_n$ *peut se relever en* f_n *avec* $\partial'_n f_n = f_{n-1}\partial_n$.
Pour montrer l'unicité à homotopie près, nous aurons besoin du lemme suivant:
Lemme: Sous les hypothèses du théorème 4, soit $f : X \to X'$ un morphisme de complexes relevant $\gamma : C \to C'$. On suppose en outre qu'il existe $t : C \to X'_0$ telle que $\varepsilon' t = \gamma$. Alors il existe des morphismes $s_n : X_n \to X'^{n+1}$ tels que pour tout n, on ait:

$$\partial' s_0 + t\varepsilon = f_0 \quad et \quad \partial' s_{n+1} + s_{n+1}\partial = f_{n+1}$$

Démonstration:
Tout d'abord, $\varepsilon'(f_0 - t\varepsilon) : X_0 \to C'$ *est nulle, donc* $f_0 - t\varepsilon$ *envoie le module projectif* X_0 *dans* $Ker \;\; \varepsilon' = Im \;\; (X'_1 \to X'_0)$. *Donc il existe* $s_0 : X_0 \to X'_1$ *telle que* $\partial' s_0 = f_0 - t\varepsilon$. *Dès lors, on suppose par récurrence que* $t = s_{-1}, s_0, ..., s_n$ *ont été construits avec les bonnes propriétés. On veut construire* s_{n+1} *avec* $\partial' s_{n+1} = f_{n+1} - s_n\partial$. *Or par hypothèse,* $\partial'(f_{n+1} - s_n\partial) = f_n\partial - (f_n - s_{n-1}\partial)\partial = 0$ *par hypothèse de récurrence, donc* $f_{n+1} - s_n\partial$ *envoie le module projectif* X_{n+1} *dans* $ker\partial' = \partial' X_{n+2}$, *donc cette application se relève en une application* $s_{n+1} : X_{n+1} \to X_{n+2}$.

Revenons donc à la démonstration de l'unicité à homotopie près:

On applique le lemme, sachant que la différence de deux morphismes de complexes f, g : $X \to X'$ *relevant le même morphisme relève l'application nulle de C dans C'.*

4.1 Un premier exemple: les groupes cycliques :

Ce sont les groupes, notés $\mathcal{C}_n$ de présentation

$$< \sigma | \sigma^n = 1 >$$

où n sera l'ordre du groupe. Ils sont isomorphes à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.
On pose

$$N = 1 + \sigma + ... + \sigma^{n-1} \in \mathbb{Z}[\mathcal{C}_n],$$

de telle sorte que $(\sigma - 1)N = 0$.

Proposition (résolution de $\mathbb{Z}[\mathcal{C}_n]$): Le $\mathcal{C}_n$ module trivial $\mathbb{Z}$ a pour résolution (libre):

$$... \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[\mathcal{C}_n] \xrightarrow{\sigma-1} \mathbb{Z}[\mathcal{C}_n] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[\mathcal{C}_n] \xrightarrow{\sigma-1} \mathbb{Z}[\mathcal{C}_n] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \; .$$

Démonstration:
C'est clairement un complexe libre. De plus,

$$Ker\ (\sigma - 1) = \{x = \sum a_i \sigma^i \in \mathbb{Z}[\mathcal{C}_n] | \forall i, a_i = a_{i+1}\} = \mathbb{Z}.N = (\mathbb{Z}[G])^G$$

Tandis que

$$KerN = \mathfrak{I} :\ \textit{idéal d'augmentation}$$

En effet, $x = \sum a_i \sigma^i \ \ (a_i \in \mathbb{Z}) \Rightarrow Nx = (\sum a_i)N$ *et ceci et nul si et seulement si* $\sum a_i = 0$, *ie si* $x \in \mathfrak{I}$. *On a donc les suites exactes*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{I} \longrightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{C}_n] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}.N \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}.N \longrightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{C}_n] \xrightarrow{\sigma - 1} \mathfrak{I} \longrightarrow 0$$

et la suite exacte annoncée est obtenue en les recollant.

On obtient donc le théorème suivant:

Théorème (cohomologie des groupes cycliques):

$$\begin{cases} Si\ n = 0,\ H^n(\mathcal{C}_n, A) = A^G \\ Si\ n\ impair,\ H^n(\mathcal{C}_n, A) = \{a \in A | Na = 0\}/(\sigma - 1).A \\ Si\ n\ pair,\ H^n(\mathcal{C}_n, A) = A^G/N.A \end{cases}$$

En particulier si l'on considère le $\mathcal{C}_n$-module trivial $\mathbb{Z}$, on trouve:

$$\begin{cases} Si\ n = 0,\ H^n(\mathcal{C}_n, A) = \mathbb{Z} \\ Si\ n\ impair,\ H^n(\mathcal{C}_n, A) = 0 \\ Si\ n\ pair,\ H^n(\mathcal{C}_n, A) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \end{cases}$$

4.2 cohomologie de $\mathbb{Z}$:

On veut calculer $H^i(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ avec $\mathbb{Z}$ considéré comme $G = \mathbb{Z}$ module trivial. On a la présentation $\mathbb{Z} = < \sigma >$.
On a la résolution

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-\sigma} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Donc $H^0(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\ H^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\ H^i(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$ pour $i > 1$.

5 La s.e.l. de cohomologie:

Avant d'aborder à proprement parler la suite exacte de cohomologie, on remarque que si

$$f : A \to B$$

est un morphisme de G-modules, on a une application induite

$$f : \mathcal{C}^n(G, A) \to \mathcal{C}^n(G, B)$$

définie par

$$f(x)(\sigma_0, ..., \sigma_n) = f(x(\sigma_0, ..., \sigma_n)).$$

On vérifie sans aucune difficulté que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C^n(G,A) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C^{n+1}(G,A) & \xrightarrow{\partial_n} & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C^n(G,B) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C^{n+1}(G,B) & \xrightarrow{\partial_n} & \cdots \end{array}$$

est commutatif, et donc que f est un morphisme de complexes, induisant par passage au quotient une application que l'on continuera de noter $f : H^n(G, A) \to H^n(G, B)$.
A partir de maintenant, on considère une suite exacte

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

de G-modules et l'on voudrait obtenir une suite exacte en termes de cohomologie. Pour construire une telle suite excate, nous aurons besoin du
Lemme (du serpent): Soit

$$\begin{array}{ccccccc} & & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & & \end{array}$$

un diagramme commutatif de groupes abéliens à lignes exactes. Alors il existe une suite exacte canonique

$$Ker\ \alpha \xrightarrow{i} Ker\ \beta \xrightarrow{j} Ker\ \gamma \xrightarrow{\delta} Coker\ \alpha \xrightarrow{i'} Coker\ \beta \xrightarrow{j'} Coker\ \gamma$$

Démonstration:
Il est évident, par commutativité du diagramme, que $i(Ker\ \alpha) \subset Ker\ \beta$, etc, etc... Le gros du travail consiste donc à construire δ et à montrer l'exactitude de la suite. Soit $c \in Ker\ \gamma$. Soient $b \in B$ tel que $j(b) = c$ (existe par surjectivité de j) et $a' \in A'$ tel que $i'(a') = \beta(b)$ (existe car $\gamma \circ j(b) = j' \circ \beta(b) = \gamma(c) = 0$ et est entièrement déterminé par injectivité de i'). On définit alors $\delta(c) = a'\ mod(\alpha(A))$, et on vérifie facilement que cela définit bien δ.

- *exactitude en $Ker\ \ \gamma$: Tout d'abord $j(Ker\ \ \beta) \subset Ker\ \ \delta$. De plus,*

$$\begin{aligned} \delta(c) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad a' = \alpha(a),\ a \in A \\ &\Rightarrow \quad \beta(b - i(a)) = i'(a') - i'(\alpha(a)) = 0 \\ &\Rightarrow \quad b - i(a) \in Ker\ \ \beta \ \ et \ \ j(b - i(a)) = j(b) = c. \end{aligned}$$

- *exactitude en $Coker\ \ \alpha$: là aussi il est clair que $\delta(ker(\gamma)) \subset ker(i')$. De plus, Soit $a' \in A'$ tel que $i'(a') = 0\ mod(\beta(b))$, ie $i'(a') = \beta(b),\ b \in B$. Alors si on pose $c = j(b)$, on a $\delta c = a'\ mod(\alpha(A))$.*

Du lemme du serpent on déduit très facilement le théorème:

Théorème:(la suite exacte longue cohomologique):
A toute suite exacte de G-modules

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

est associée une suite exacte longue

$$0 \to A^G \to B^G \to C^G \to H^1(G, A) \to ... \to H^n(G, A) \to H^n(G, B) \to H^n(G, C) \to H^{n+1}(G, A) \to ...$$

Démonstration:
De la suite exacte de l'énoncé on déduit le diagramme commutatif (*):

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}^{n-1}(G,A) & \xrightarrow{i^*} & \mathcal{C}^{n-1}(G,B) & \xrightarrow{j^*} & \mathcal{C}^{n-1}(G,C) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \partial} & & \downarrow{\scriptstyle \partial} & & \downarrow{\scriptstyle \partial} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}^{n}(G,A) & \xrightarrow{i^*} & \mathcal{C}^{n}(G,B) & \xrightarrow{j^*} & \mathcal{C}^{n}(G,C) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \partial} & & \downarrow{\scriptstyle \partial} & & \downarrow{\scriptstyle \partial} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}^{n+1}(G,A) & \xrightarrow{i^*} & \mathcal{C}^{n+1}(G,B) & \xrightarrow{j^*} & \mathcal{C}^{n+1}(G,C) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les colonnes sont exactes par exactitude du foncteur $C^n(G, -)$ (à vérifier!). Dès lors, on pose $\overline{\mathcal{C}}^n(G, A) = \mathcal{C}^n(G, A)/B^n(G, A)$. Du diagramme (*) ci-dessus on déduit le diagramme commutatif (**):

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \overline{\mathcal{C}}^{n}(G,A) & \xrightarrow{i^*} & \overline{\mathcal{C}}^{n}(G,B) & \xrightarrow{j^*} & \overline{\mathcal{C}}^{n}(G,C) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\partial}_A} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\partial}_B} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\partial}_C} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{Z}^{n+1}(G,A) & \longrightarrow & \mathcal{Z}^{n+1}(G,B) & \longrightarrow & \mathcal{Z}^{n+1}(G,C) & & \end{array}$$

dont les lignes sont exactes.
Montrons-le par exemple pour la ligne du haut. Tout d'abord les flèches du diagramme ci-dessus sont celles induites naturellement par celles du diagramme $(*)$. La surjectivité de la flèche

$$\overline{\mathcal{C}}^n(G, B) \to \overline{\mathcal{C}}^n(G, C)$$

est donc claire. Montrons donc l'exactitude en $\overline{\mathcal{C}}^n(G,B)$. *Il est clair que la composée* $j^* \circ i^*$ *est nulle. Enfin, si* $b_n \in \mathcal{C}^n(G,B)$ *est tel que* $j^*(b_n) \in B^n(G,A)$, *on a* $j^*(b_n) = \partial(c_{n-1})$ *avec* $c_{n-1} \in \mathcal{C}^{n-1}(G,C)$. *Donc il existe* $b_{n-1} \in \mathcal{C}^{n-1}(G,B)$ *tel que* $c_{n-1} = i^*(b_{n-1})$. *Donc*

$$j^*(b_n) - \partial \circ j^*(b_{n-1}) = j^*(b_n - \partial b_{n-1}) = 0$$

la première égalité provenant de la commutativité du diagramme (*). Par exactitude des lignes de (*): $b_n - \partial b_{n-1} = i^*(a_n)$ *pour* $a_n \in \mathcal{C}^n(G,A)$.
Le lemme du serpent appliqué à ce diagramme ainsi que la remarque suivante:

$$ker(\overline{\partial}_A) = H^n(G,A),\ coker(\overline{\partial}_A) = H^{n+1}(G,A)$$

permettent de conclure la construction de la suite exacte longue de cohomologie.

6 Cup-produit

Si A, B sont deux G-modules, $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ est un G-module via $g.(a \otimes b) = ga \otimes gb$. On obtient une forme bilinéaire, notée $\cup$ définie pour tout $p, q \geq 0$ par

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}^p(G,A) \times \mathcal{C}^q(G,A) & \to & \mathcal{C}^{p+q}(G, A \otimes B) \\ (a,b) & \mapsto & a \cup b | a \cup b(\sigma_0, ..., \sigma_{p+q}) = a(\sigma_0, ...\sigma_p) \otimes b(\sigma_p, ..., \sigma_{p+q}) \end{array}$$

Proposition: distrib. des op. de bord sur le cup prod.: Pour tout $a \in \mathcal{C}^p(G,A)$, $b \in \mathcal{C}^q(G,B)$, on a:

$$\partial(a \cup b) = \partial a \cup b + (-1)^p a \cup \partial b.$$

Démonstration:
Simple vérification.

□

Donc

- si a et b sont des cocycles, $a \cup b$ aussi.
- si a est un cocycle et b un cobord (ou l'inverse), $a \cup b$ est un cobord.
  Donc l'application $\cup$ induit une application que l'on continue de noter $\cup$

  $$\cup : H^p(G,A) \times H^q(G,B) \to H^{p+q}(G, A \otimes B).$$

  On remarque que pour $p = q = 0$, c'est

  $$\begin{array}{rcl} A^G \times B^G & \to & (A \otimes B)^G \\ (a,b) & \mapsto & a \otimes b \end{array}$$

7 Cohomologie de Tate:

7.1 Brefs rappels sur l'homologie d'un groupe

Soit $\epsilon : F \to \mathbb{Z}$ une résolution projective de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}[G]$ et A un G-module. On définit $H_n(G,A) := H_n(F_{G,A})$ où $F_{G,A}$ est le complexe obtenu à partir de F en appliquant $-\otimes_G A$ On vérifie que $H_n(G,A)$ est indépendante de la résolution projective choisie. De même, on vérifie qu'à toute suite exacte de G-modules

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

est associée une suite exacte longue en homologie

$$... \to H_{n+1}(G,C) \to H_n(G,A) \to H_n(G,B) \to H_n(G,C) \to H_{n-1}(G,A) \to ... \to 0.$$

Exemples:

- $H_0(G,A) = A/IA$ avec I l'idéal d'augmentation: bref, $H_0(G,A)$ est le plus grand quotient de A sur lequel G agit trivialement.
- $H_1(G,\mathbb{Z}) = G^{ab}$.

7.2 Cohomologie de Tate:

On ne considère à présent que le cas G fini!
Soit

$$N = \sum_{\sigma \in G} \sigma.$$

Pour tout G-module A, la multiplication par N définit un endomorphisme $N : A \to A$ tel que

$$\begin{array}{rcl} IA & := & < \sigma a - a >_{\sigma \in G, a \in A} \subset Ker \ \ N \\ Im \ \ N & \subset & A^G. \end{array}$$

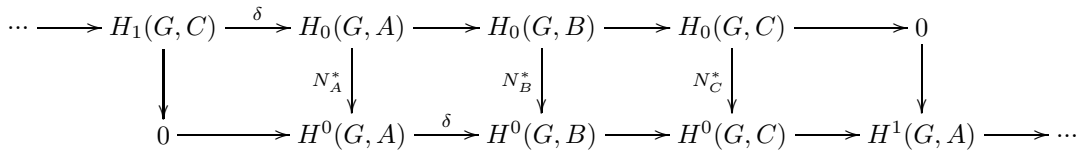
Donc N induit $N_* : H_0(G,A) \to H^0(G,A)$ On définit

$$\begin{array}{rcl} \widehat{H_0}(G,A) & = & Ker \ \ N_* \\ \widehat{H^0}(G,A) & = & Coker \ \ N_* = A^G/N(A) \\ \widehat{H^q}(G,A) & = & H^q(G,A) \text{ si } q > 0 \\ \widehat{H^{-1}}(G,A) & = & \widehat{H_0}(G,A) \\ \widehat{H^{-q}}(G,A) & = & H_{q-1}(G,A) \text{ si } q \geq 2. \end{array}$$

Théorème: A chaque suite exacte courte de G-modules $0 \to A \to B \to C \to 0$ est associée une suite exacte longue

$$... \to \widehat{H^q}(G,A) \to \widehat{H^q}(G,B) \to \widehat{H^q}(G,C) \to \widehat{H^{q+1}}(G,A) \to ...$$

Démonstration: *Il s'agit de recoller les suites exactes de cohomologie et d'homologie (on admet l'existence de cette dernière). On considère le diagramme suivant:*



dont on vérifie qu'il est il commutatif et à lignes exactes. Il suffit alors d'appliquer le lemme du serpent.

8 Le théorème de Tate-Nakayama

Définition: Soit G un groupe fini. Un G-module C est un **module de classe** si pour tout $H < G$:

- $H^1(H, C) = 0$
- $H^2(H, C) = \mathbb{Z}/\sharp H\mathbb{Z}$.

Un générateur γ de $H^2(H, C)$ est appelé une **classe fondamentale**.

On énonce à présent le théorème fondamental de l'exposé!

Théorème: (Tate-Nakayama) Soit G un groupe fini et C un G-module de classe, de classe fondamentale γ.
Alors pour tout sous groupe $H < G$ et pour tout entier n le cup produit avec γ induit un isomorphisme

$$H^n(H, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^{n+2}(H, A).$$

9 Le groupe de Brauer d'un corps local:

Notations: K un corps local, $L|K$ une extension galoisienne, $G = Gal(L|K)$. On notera,

- pour tout p: $H^p(L|K) = H^p(G, l^\times)$.
- K_s la clôture séparable de K.
- K_{nr} l'extension maximale non ramifiée de K.

Définition: On appelle groupe de Brauer de K le groupe

$$Br(K) = \lim_{\rightarrow} H^2(L_i|K)$$

la limite étant prise sur l'ensemble des extensions séparables finie de K.
On a donc $Br(K) = H^2(K_s|K)$.

Nb: On admettra que $Br(K) = H^2(K_{nr}|K)$ (ce résultat est non trivial: il résulte de la nullité de $Br(K_{nr})$ et de la suite exacte Inflation-Restriction).
On admettra aussi le fait suivant: si K_n est L'extension non ramifiée de degré n sur K et $G_n = Gal(K_n|K)$ alors $H^p(G_n, K_n^\times) \xrightarrow{\sim} H^p(G_n, \mathbb{Z})$, l'isomorphisme étant donné par la valuation. De sorte qu'en passant à la limite, il s'agit de calculer $H^2(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. Or si on pose $G = \mathbb{Z}$ et si on considère la suite exacte courte de G-modules triviaux

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

et puisque $\mathbb{Q}$ a une cohomologie triviale (il est uniquement divisible) on obtient pas la s.e.l. que le connectant δ est un isomorphisme: $\delta : H^1(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(G, \mathbb{Z})$. De sorte que l'on obtient

$$Br(K) = H^2(K_{nr}|K) \xrightarrow{v} H^2(Z, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta^{-1}} H^1(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Toutes le flèches étant des isomorphismes, on en déduit

$$Inv_K : Br(K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Proposition: Soit L|K une extension de degré n. Alors on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H^2(K_{nr}|K) & \xrightarrow{Res} & H^2(L_{nr}|L) \\ \downarrow{\scriptstyle inv_K} & & \downarrow{\scriptstyle inv_L} \\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \xrightarrow{n} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \end{array}$$

Démonstration: Soit $\Gamma_K = Gal(K_{nr})(= \mathbb{Z})$ et F_K le Frobenius de Γ_K.
Mêmes notations pour L...
On a $F_L = F_K^f$ avec f le degré résiduel de L sur K. Soit e l'indice de ramification de $L|K$.

$$\begin{array}{ccccccc} H^2(\Gamma_K, K_{nr}^\times) & \xrightarrow{v_K} & H^2(\Gamma_K, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta^{-1}} & Hom(\Gamma_K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\gamma_K} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ \downarrow{\scriptstyle Res} & & \downarrow{\scriptstyle e.Res} & & \downarrow{\scriptstyle e.Res} & & \downarrow{\scriptstyle n} \\ H^2(\Gamma_L, L_{nr}^\times) & \xrightarrow{v_L} & H^2(\Gamma_L, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta^{-1}} & Hom(\Gamma_K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\gamma_L} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.. \end{array}$$

Le carré du milieu commute trivialement.
La commutativité du premier diagramme provient de ce que sur K_{nr}, $v_L = ev_K$.
Enfin, la commutativité du dernier diagramme provient de ce que $F_L = F_K^f$ et $n = ef$.

10 théorie du corps de classe: cas local;

On veut appliquer le théorème de Tate-Nakayama. On doit vérifier deux choses:

- $H^1(L|K) = \{0\}$ pour $L|K$ finie: c'est le théorème 90 de Hilbert. Plus précisément: Soit $G = Gal(L|K)$ et soit f un 1-cocycle de G dans $L^\times$. Par indépendance linéaire des automorphismes il existe $c \in E^\times$ tel que

$$b = \sum_{x \in G} f(x)x(c) \neq 0.$$

  En appliquant $y \in G$ on trouve (puisque $f(yx) = f(y)yf(x)$)

$$y(b) = \sum_{x \in G} [yf(x)][yx(c)] = \sum_{x \in G} f^{-1}(y)f(yx)yx(c)$$

  donc

$$y(b) = f^{-1}(y) \sum_{z \in G} f(z)z(c) = f^{-1}(y)b$$

  de sorte que $f(y) = by(b)^{-1}$: soit f est un cobord!

- $H^2(L|K) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si $[L : K] = n$. Or cela résulte de ce que

$$H^2(L|K) = Ker\Big(Br(K) \xrightarrow{Res} Br(L)\Big)$$

  (ce résultat est non trivial et résulte de la nullité de H^1 et de la suite Inf-Res).

Conclusion: Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ le cup produit par $u_{L|K}$ (unité fondamentale telle que $inv_K(u_{L|K}) = \frac{1}{n}$) définit un isomorphisme

$$H^n(Gal(L|K), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^{n+2}(Gal(L|K), L^\times).$$

En particulier pour $n = -2$, le cup produit avec $u_{L|K}$ définit un isomorphisme

$$\vartheta_{L|K} : Gal(L|K)^{ab} \xrightarrow{\sim} K^\times / NL^\times$$

dont l'inverse est appelé isomorphisme de réciprocité.